Actas del XVIII Congreso de la AC (Xàtiva, 2015).
Cerámica aplicada a la arquitectura: patrimonio público y privado.

Cartabón-Truchet: Un azulejo muy matemático

Truchet: A really mathematical tile

Ángel Requena Fraile

Resumen

Las técnicas tradicionales de los artesanos en pro de la belleza, y la búsqueda de formas simples de las que se puedan obtener muchos y variados diseños, no dejaron de admirar al matemático sensible que fue el padre Sebastián Truchet, comisionado del Rey Luís XIV de Francia a finales del siglo XVII. Este matemático exploró la enorme cantidad de bellas disposiciones que se pueden lograr con azulejos de cartabón y obtuvo lo máximo posible: doce grupos de simetría. Los trabajos de Truchet fueron continuados por el Padre Domingo Doüat y se incorporaron a la *Enciclopedia* de Diderot y D´Alembert ¡También las modestas baldosas que pisamos puede ser fuente de inspiración matemática!

Abstract

The traditional techniques of craftsmen in favor of beauty, and the search for simple forms from which many and varied designs can be obtained, did not stop admiring the sensitive mathematician who was Father Sebastián Truchet, commissioner of King Louis XIV of France at the end of the 17th century. This mathematician explored the enormous number of beautiful arrangements that can be achieved with bevel tiles and obtained the maximum possible: twelve symmetry groups. The works of the mathematician Truchet were continued by Father Domingo Doüat and were incorporated into the Encyclopedia of Diderot and D'Alembert. Even the modest tiles that we step on can be a source of mathematical inspiration!

Palabras clave

Grupos de simetría, azulejos de cartabón, historia de la cerámica.

Keywords

Symmetry groups, bevel tiles, history of ceramics.

LOS ESTUDIOS DE TRUCHET Y DOÜAT

El azulejo cuadrado dividido diagonalmente en dos colores, llamado de *Truchet* por los matemáticos y de *cartabón* por los ceramistas, tiene ya más de tres siglos de historia como objeto matemático.

La historia pudo empezar en 1675 con el encargo del ministro Colbert, en nombre del Rey Sol, a la *Académie Royale des Sciences* de estudiar las técnicas artesanales. Hasta 1693 no se pone en marcha el grupo de trabajo dirigido por el abate Jean Paul Bignon y del que formara parte el padre Sébastien Truchet (Truchet, 1704) (fig. 1).

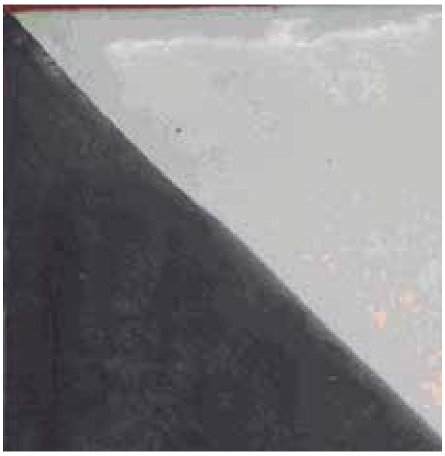


Fig. 1.

Supervisando las obras de los nuevos canales y recopilando información de las técnicas, a Truchet no le pasarán desapercibidos algunos azulejos y se percatará de la *fecundidad* combinatoria de algo *tan sencillo* (e inconscientemente de sus simetrías ornamentales cuando buscaba las formas de mayor belleza). En sus propias palabras:

> En el último viaje que he hecho al Canal de Orleáns por orden de su alteza real, encontré en el castillo llamado la Motte S. Lye, cuatro leguas más allá de Orleáns, varios azulejos cerámicos cuadrados de dos colores separados diagonalmente, que estaban destinados a pavimentar una capilla y varios apartamentos más. Para poder formar agradables figuras y dibujos combinando los azulejos, estudie primero de cuántas formas dos de estos azulejos podían juntarse, disponiéndolos siempre en forma de tablero de ajedrez. […]
>
> Hemos intentado después formar dibujos y agrupaciones con esas figuras colocadas juntas, siempre en forma de tablero de ajedrez; hemos encontrado una cantidad enorme para poderlos enseñar todos: hemos escogido únicamente cien de ellos, que hemos puesto en limpio, para que cada uno pueda comprobar con sus propios ojos lo cierto de lo que hemos afirmado, y la fecundidad de estas combinaciones de origen tan sencillo (Truchet, 1704).

Como resultado de sus estudios, el Padre Truchet publicó una pequeña «Memoria sobre las combinaciones» de estos azulejos recogida entre las *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* de 1704 (Truchet, 1704). El autor expone primero que cada azulejo individual se puede colocar de cuatro formas distintas para después tomar dos azulejos y colocarlos en las cuatro esquinas de un tablero de ajedrez. El cálculo da que existen 64 formas de colocarlas, las 16 (4^2) de las combinaciones con repetición de los dos azulejos multiplicadas por 4, por ser cuatro las esquinas (fig. 2).

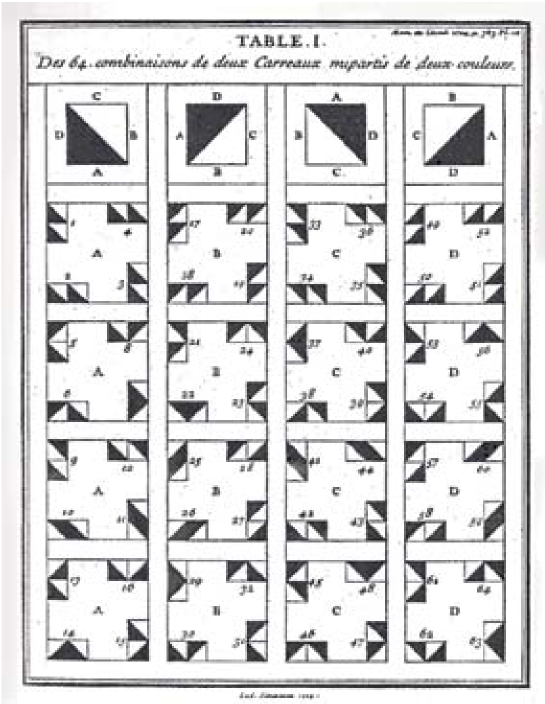


Fig. 2.

De la combinación de los azulejos se obtiene *una cantidad enorme* de diseños agradables. Truchet selecciona cien pero en la *Memoria* de 1704 solo publica grabados de treinta. Las planchas de cobre llevan la firma del conocido grabador Simonneau.

Las investigaciones de Truchet deberían formar parte de una ambiciosa obra enciclopédica, la *Description des arts et métiers, faites ou approuvées par Messieurs de l´Académie Royale des Sciences*, que no se empezará a publicar en forma de volúmenes hasta 1761. Pero en 1705 el mismo grabador Simonneau ya había preparado las cien combinaciones previstas, en realidad son 96, en un formato más pequeño (Truchet, 1704).

Truchet trabaja a las órdenes de la corona desarrollando gran actividad, siendo requerido para otros trabajos. Es por ello que tras la memoria de 1704 y los grabados de 1705 parece abandonar sus investigaciones sobre los azulejos diagonales.

Hay noticias de que en 1719, el padre Domingo Doüat, dominico de la provincia de Toulouse, ya había publicado la continuación de las investigaciones de Truchet. El libro que nos ha llegado, lleva fecha de 1722 y su título es lo suficientemente significativo: *Méthode pour faire une infinité de desseins différents avec des carreaux* *mi-partis de deux couleurs par une ligne diagonale: ou observations du Père Dominique Doüat, Religieux Carme de la Province de Toulouse, sur un mémoire inséré dans l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris l'année 1704, présenté par le Révérend Père Sébastien Truchet religieux du même ordre* (Doüat, 1722).

Doüat se olvidará del tablero de ajedrez y se centrará en que las combinaciones con repetición tienen un crecimiento exponencial. Ya sólo cuatro azulejos dan 256 diseños distintos (4^4) y dieciséis darán cerca de cinco mil millones (4^{16}). Por tanto un enlosado de una habitación ofrece *infinitas* posibilidades.

El estudio matemático de Doüat es más simple y, a la vez, más riguroso que el de Truchet. Además utiliza letras para no tener que dibujar siempre las cuatro posiciones posibles de cada azulejo.

Una vez hecho el estudio combinatorio, el *Méthode* ofrece a los artesanos 72 diseños diferentes. En su gran mayoría las propuestas de Doüat se dirigen sobre todo al diseño completo y no tanto a una teselación periódica simple. Para el estudio de los grupos de simetría nos han interesado más los originales de Truchet. (

El libro de Doüat fue traducido al español y publicado el año 1734 en Madrid. La Biblioteca Nacional ha digitalizado uno de los ejemplares. Curiosamente, no resulta fácil de localizar por estar adjunto a un libro muy popular en la época, los *Secretos de las Artes Liberales y Mecánicas* de Bernardo Montón (Doüat, 1722). A diferencia del original francés, la traducción española no menciona a Truchet (fig. 3).

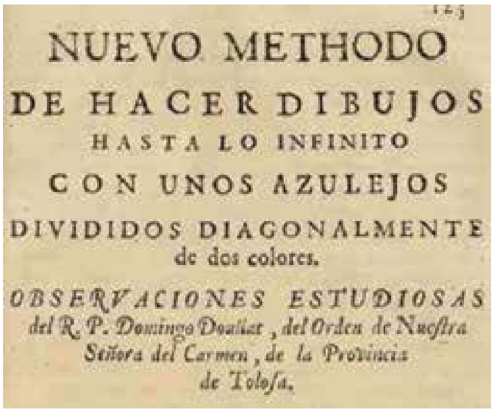

NUEVO METHODO
DE HACER DIBUJOS
HASTA LO INFINITO
CON UNOS AZULEJOS
DIVIDIDOS DIAGONALMENTE
de dos colores.
OBSERVACIONES ESTUDIOSAS
del R. P. Domingo Doüat, del Orden de Nueſtra
Señora del Carmen, de la Provincia
de Toloſa.

Fig. 3.

Los estudios de Truchet y Doüat, y su estimulante belleza, no pasaron desapercibidos a las sucesivas ediciones de las *Récréations mathemátiques et physiques* de Ozanam (1778), uno de los primeros libros de pasatiempos matemáticos con innumerables traducciones y reediciones. Los pasatiempos originales de Ozanam se publicaron en el siglo XVII y no podían conocer las investigaciones de los dos dominicos, pero todas las reediciones del popular texto a partir de 1750 se actualizan con los *azulejos de Truchet*.

Las Recreaciones convierten el modesto azulejo diagonal en un juego, el *Jeu du Parquet*. Se trata de colocar 64 piezas (o 100) en un tablero cuadrado y hacer con ellas las disposiciones más agradables.

L´Encyclopédie de Diderot y D´Alembert también reseña brevemente los trabajos de Truchet, así como otros libros de decoración posteriores.

SIMETRÍAS EN LAS TESELACIONES PLANAS PERIÓDICAS

Decimos que un objeto posee *simetría* cuando permanece invariable tras algún tipo de movimiento. Por ejemplo: un cuadrado permanece inalterado si se gira un cuarto de vuelta, media vuelta o tres cuartos de vuelta, y también si se refleja en distintos espejos, horizontal, vertical y diagonales.

Los movimientos que pueden dejar invariable una superficie plana cubierta por azulejos (***teselación***) son de cuatro tipos: *traslaciones, giros o rotaciones, reflexiones en ejes de simetría y reflexiones en ejes de deslizamiento.*

Una ***traslación*** es el movimiento elemental del azulejo o un grupo de azulejos. Se traslada sin girarse. Si se cubre toda una superficie moviendo un azulejo siempre a la misma distancia según esas dos direcciones se habla de teselación periódica. La figura muestra una ***translación periódica*** en dos direcciones, que no tienen por qué ser perpendiculares (fig. 4).

.

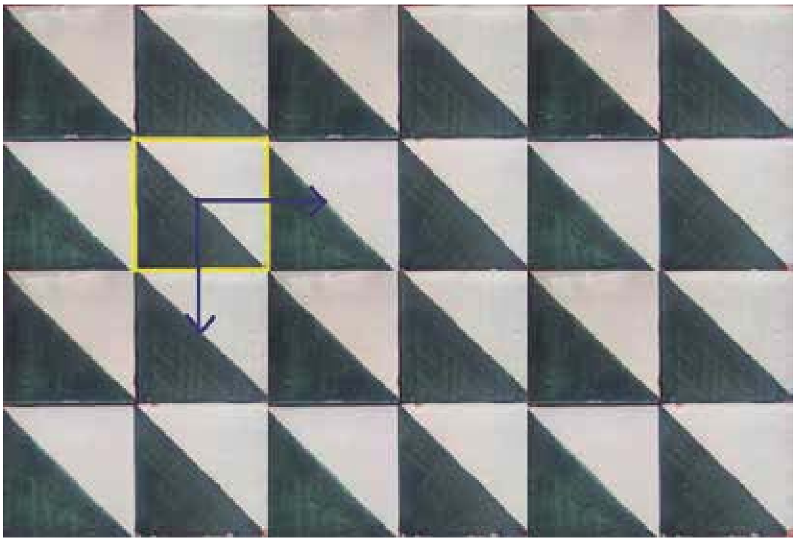


Fig. 4.

Las traslaciones son lo característico del recubrimiento con azulejos. Se llama *celda base* o *primitiva* al paralelogramo que se repite, la celda no tiene que coincidir con el azulejo, puede ser una parte de él o puede estar formada por varios. En este escrito se usa el color amarillo para resaltarla.

Un *giro* es la *rotación* dejando un punto fijo. Todos los azulejos tienen un giro obvio: dar una vuelta completa. Para mantener la periodicidad en las teselaciones del plano sólo son posibles los giros de un sexto de vuelta (hexágono regular), un cuarto de vuelta (cuadrado), un tercio de vuelta (triángulo equilátero), y media vuelta. Resulta evidente que un cuarto incluye media vuelta, y que un sexto incluye un tercio. En la figura vemos como la configuración de dos azulejos girada 180º queda invariante. La flecha sin embargo que apuntaba hacia arriba cambia (fig. 5).

Fig. 5.

Se dice que tenemos una *reflexión en un eje de simetría* cuando al doblar por esa línea las dos partes se superponen. Marcaremos los ejes de simetría en rojo (fig. 6).

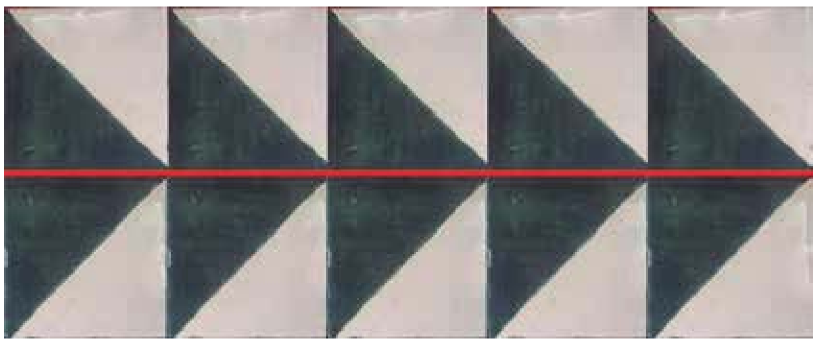


Fig. 6.

Existe un *eje de simetría de reflexión deslizante* cuando la figura queda invariable por una acción conjunta de una traslación y un espejo. En la figura inferior, cenefa de azulejos de cartabón, vemos como existe un eje de simetría con deslizamiento. Cada azulejo es simétrico del que le sigue respecto al eje central horizontal si se desplaza una unidad. La celda base se forma con dos azulejos contiguos. Los ejes de simetría deslizantes se marcarán en verde (fig. 7).

Fig. 7.

Los tres tipos de simetría (giros, ejes y ejes con deslizamiento pues la traslación es propia de la periodicidad) nos permiten clasificar todas los grupos de simetrías de las cenefas (frisos) o de todo el plano.

LOS DIECISIETE GRUPOS DEL PLANO Y LOS DOCE DE TRUCHET

Las teselaciones periódicas del plano se clasifican en 17 grupos. Cuatro con el giro único completo, cinco con giro de media vuelta, tres con giro de un tercio de vuelta, otras tres con giro de un cuarto de vuelta y, por último, dos con giro de un sexto de vuelta.

En muy pocos lugares se localizan conjuntamente los 17 grupos: el Palacio de la Alhambra es uno de ellos. Los artesanos nazaríes demostraron su gran virtuosismo utilizando en la decoración con alicatados y yeserías todos los grupos posibles, ¡y lo lograron mucho antes de que se demostrara teóricamente!

Con los azulejos de Truchet podremos construir hasta 12 de los 17 grupos. Un único azulejo siempre permite obtener varios grupos de simetría, aunque él mismo no tenga ninguna simetría propia. El de Truchet si tiene un eje de reflexión, la diagonal perpendicular a la de cambio de color, y por ello nos ofrece hasta 12 grupos. Los únicos no admitidos son los de giros de 60º y 120º, que son los cinco grupos restantes.

El azulejo de Truchet es entonces uno de los azulejos que permite más posibilidades de construcción de simetrías. La celda base con un único azulejo, con un eje de reflexión diagonal, se cataloga como grupo *cm*.

LOS DOCE GRUPOS DE SIMETRÍA EN LOS DISEÑOS DE TRUCHET DE 1704 Y 1705

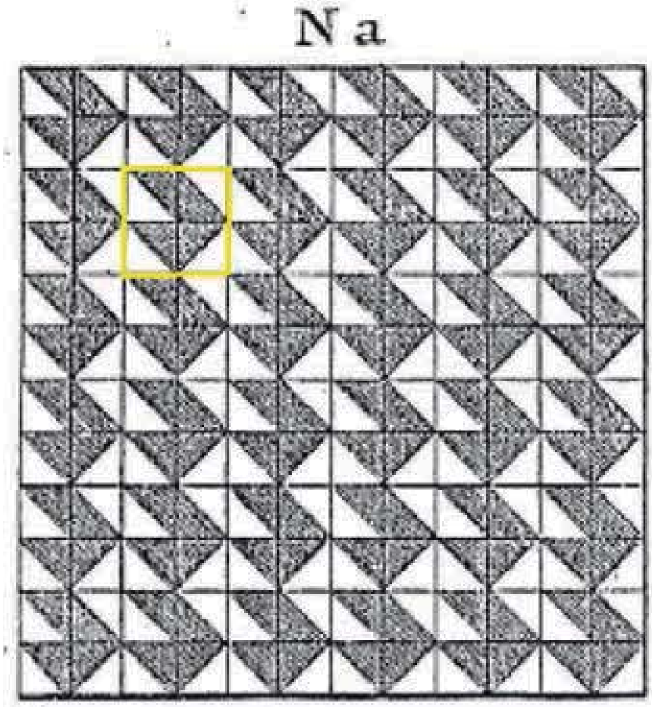
Cuando Truchet realiza sus estudios la combinatoria tenía cierta tradición pero la teoría de grupos de teselaciones no se desarrollará hasta finales del siglo XIX cuando Evgraf Stepanovich Fedorov (1853-1919) clasifica los grupos cristalográficos. La nomenclatura internacional que usamos se debe a Hermann- Mauguin y no tiene todavía un siglo.

Truchet no llegó a clasificar los grupos pero, al igual que los artesanos de la Alhambra, si pone ejemplos de los 12 posibles usando la belleza de los diseños como única guía. En la memoria de 1704 se presentan 30 diseños: 10 son p4m, 5 cm, 4 pmg, 3 pm, 3 p4g, 3 p2, 1 pmm y 1 pgg. Faltan los grupos pg, cmm, p4 y p1. La ampliación a 96 diseños de la *Descripción de las artes y oficios* de 1705 completará los cuatro que faltaban.

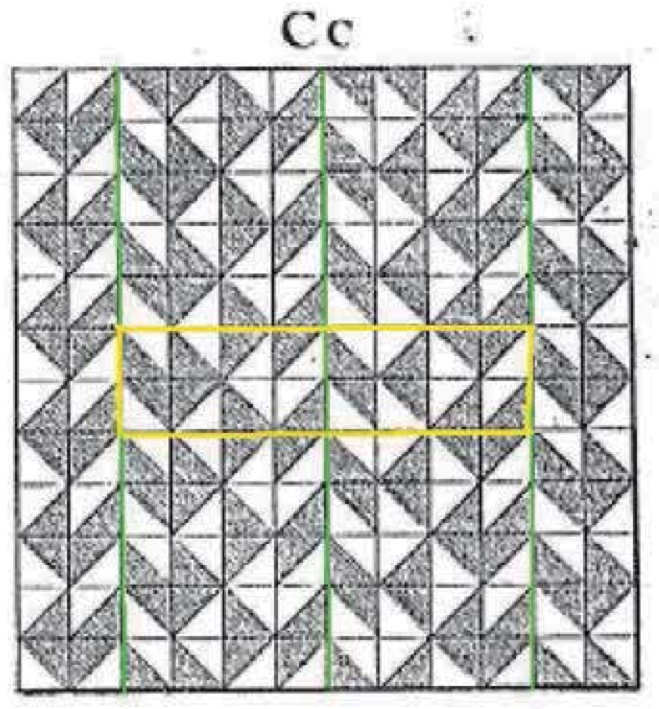
La mayor frecuencia de aparición del diseño p4m es habitual en todas las teselaciones del plano y se debe a la presencia de más elementos de simetría.

Veamos un ejemplo de cada uno ellos.

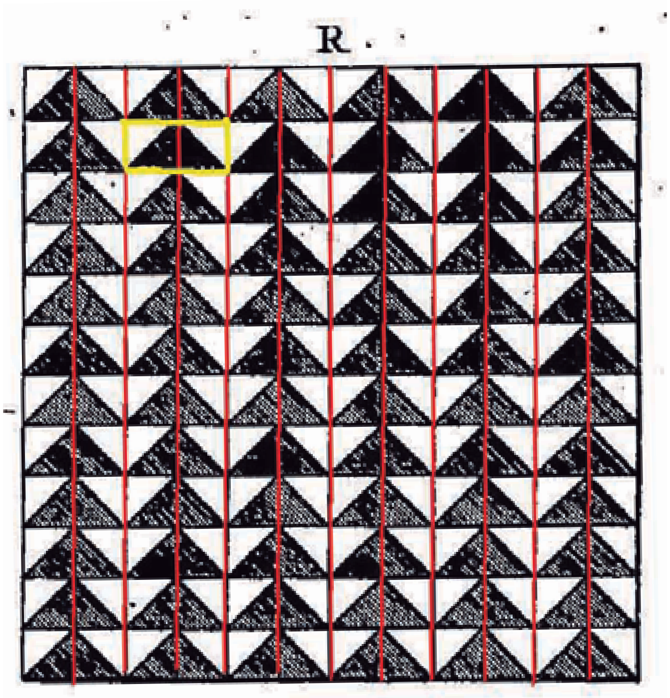
1. ***Grupo p1 (1705)***: sin ningún tipo de simetría ni giro [p de *primitive*]. Fig. 8.



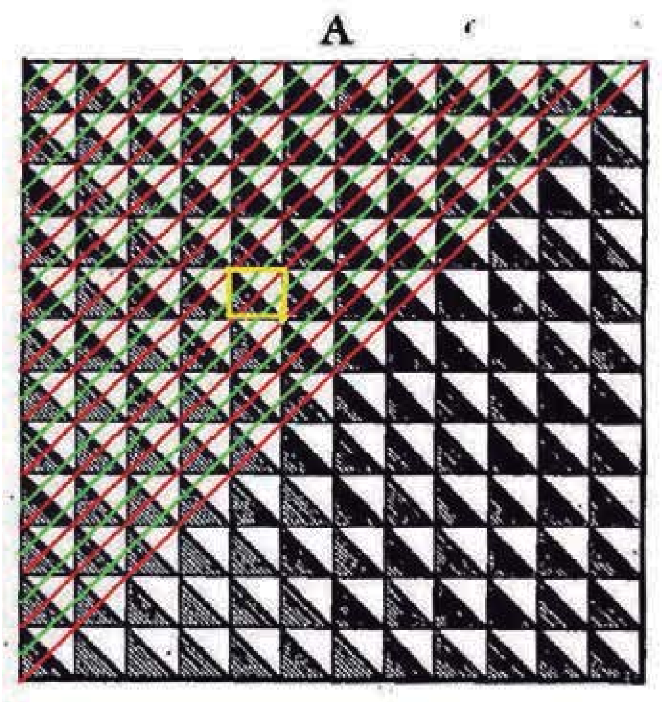
2. **G*rupo pg (1705)***: un eje deslizante, sin ningún giro [g de *glide*]. Fig. 9.



3. ***Grupo pm (1704)***: un eje de simetría especular, sin ningún giro [m de *mirror*]. Fig. 10.

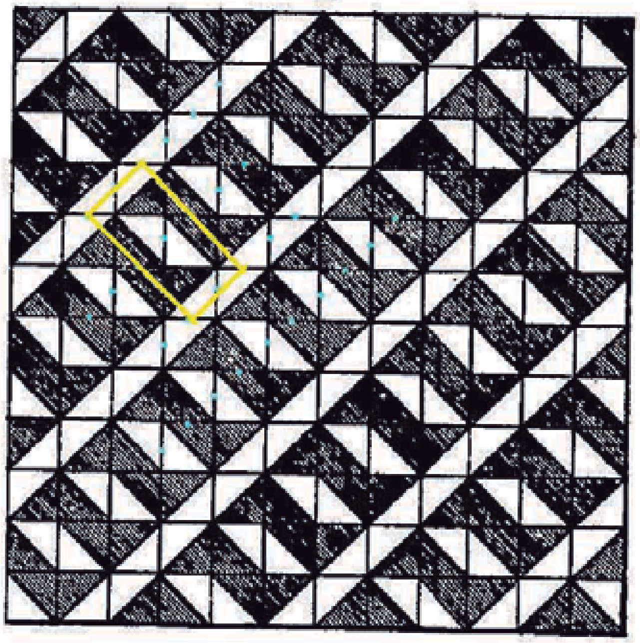


4. ***Grupo cm (1704)***: un eje de simetría especular y otro deslizante, sin ningún giro. Fig. 11.



5. ***Grupo p2 (1704)***: giros de orden 2 (180º), sin ejes de simetría. Fig. 12.

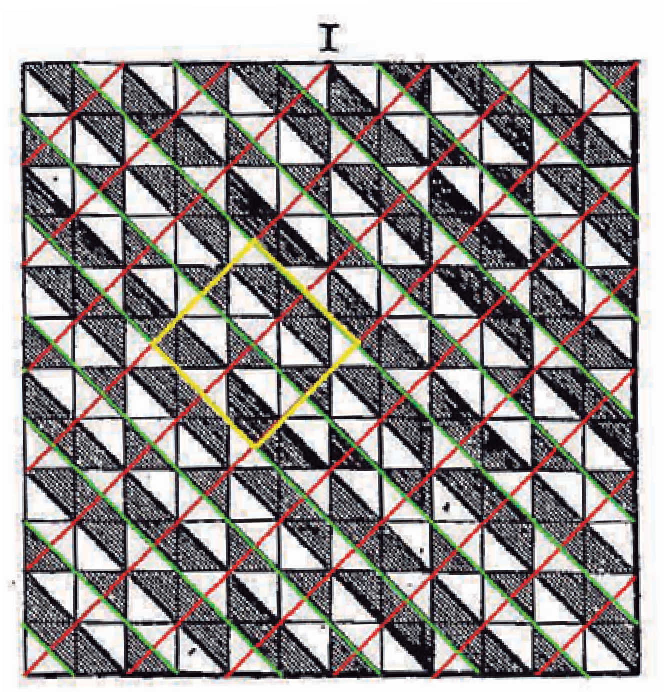
U



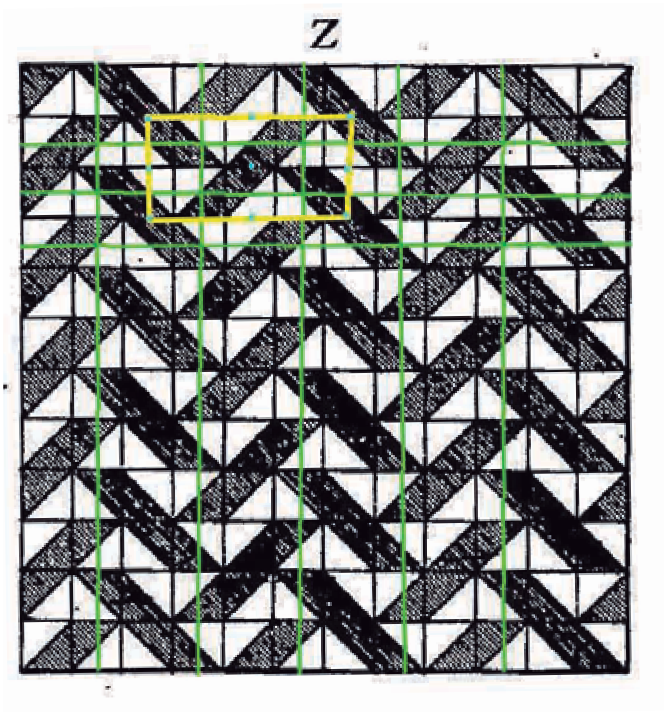
6. ***Grupo pmm (1704)***: giros de orden 2 (180º) y dos ejes de simetría. Fig. 13.

C

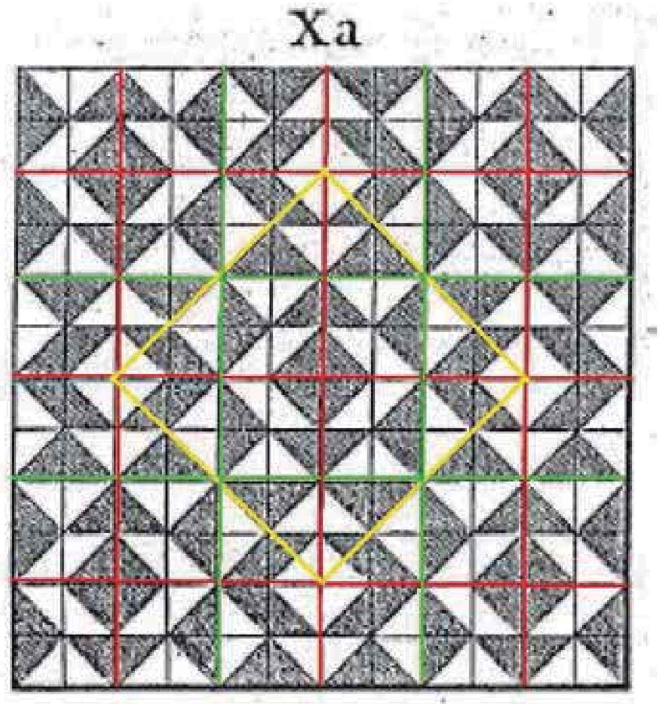
7. ***Grupo pmg (1704)***: giros de orden 2 (180º) y un eje de simetría y otro deslizante. Fig. 14.



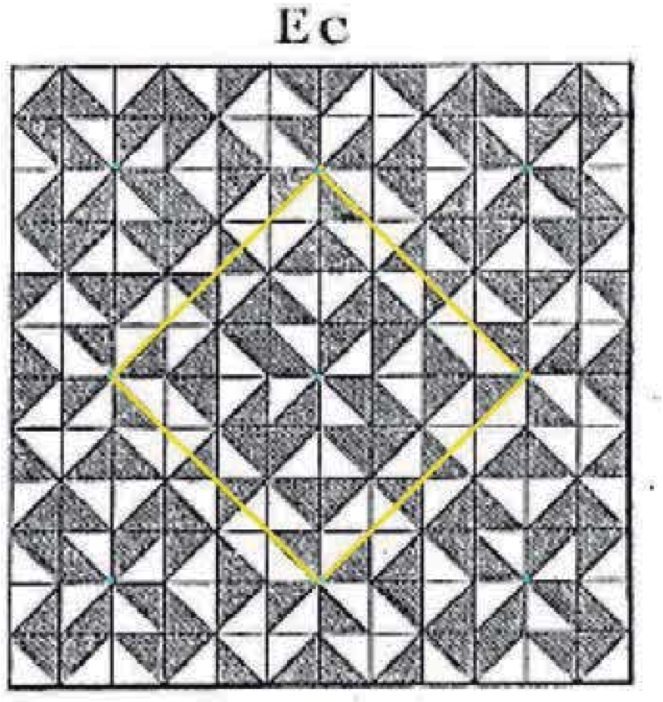
8. ***Grupo pgg (1704)***: giros de orden 2 (180º) y dos ejes de simetría deslizantes. Fig. 15.



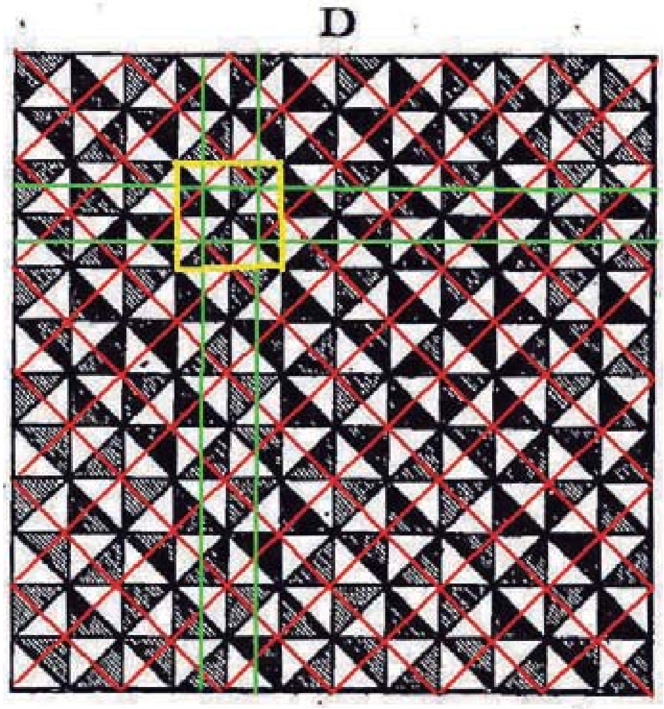
9. **Grupo *cmm (1705)***: giros de orden 2 (180º) y dos ejes de simetría y de deslizamiento. Fig. 16.



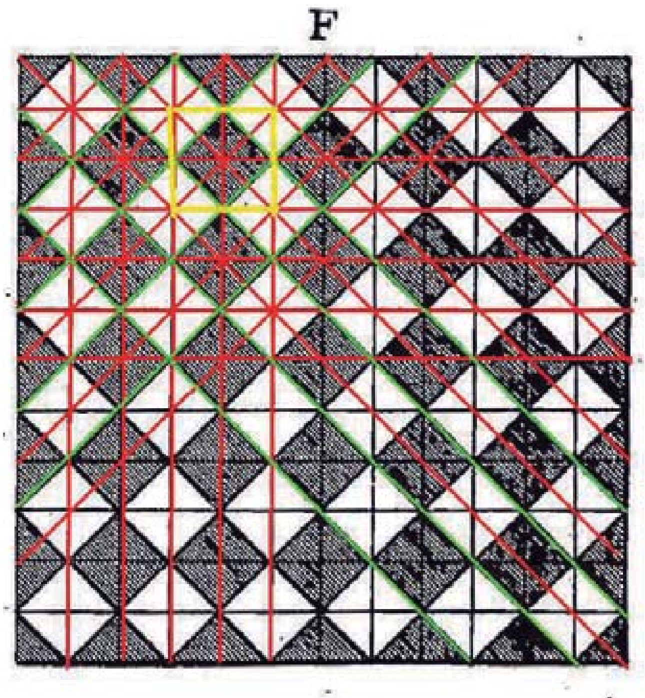
10. ***Grupo p4 (1705)***: giros de orden 4 (90º) y sin ejes de simetría ni de deslizamiento. Fig. 17.



11. ***Grupo p4g (1704)***: giros de orden 4 y ejes de simetría que no pasan por los centros de giro de orden. Fig. 18.



12. ***Grupo p4m (1704)***: giros de orden 4 y cuatro ejes de simetría que pasan por los centros de giro. Fig. 19.



Referencias

[1] ANDRÉ, J. *Les planches de pavages de Truchet.* En cours de rédaction Version provisoire du 7 février 2010. http://jacques-andre.fr/faqtypo/truchet/truchet-planches.pdf

[2] DOÜAT, D. *Méthode pour faire une infinité de desseins différents avec des carreaux mi-partis de deux couleurs par une ligne diagonale : ou observations du Père Dominique Doüat, Religieux Carme de la Province de Toulouse, sur un mémoire inséré dans l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris l'année 1704, présenté par le Révérend Père Sébastien Truchet religieux du même ordre, Académicien honoraire*, Paris, 1722. Facsimil con introducción de J. André en: http://jacques-andre.fr/ed/douat.pdf

[3] DOÜAT, D. *Nuevo méthodo de hacer dibujos hasta el infinito con unos azulejos divididos diagonalmente de dos colores.* (Anexo al libro *Secretos de las Artes Liberales y Mecánicas* de Bernardo Montón. Madrid, 1734. http://bdh-rd.bne.es/viewer.vm?id=0000076136&page=1

[4] OZANAM, J. *Récréations mathematiques et physiques*. Paris, 1778. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k927336

[5] REQUENA, A. *Simetrías en los azulejos de Francisco Aguar*. Catalogo de la Exposición sobre Francisco Aguar. Museo Nacional de la Cerámica y Artes Decorativas. Valencia. 2015.

[6] TRUCHET, S. « Mémoire sur les combinaisons », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1704.

[7] VV. AA. *Description des arts et métiers, faites ou approuvées par Messieurs de l´Académie royale des sciences*. No se empezó a publicar sistemáticamente hasta 1761 pero sí algunos artículos sueltos.